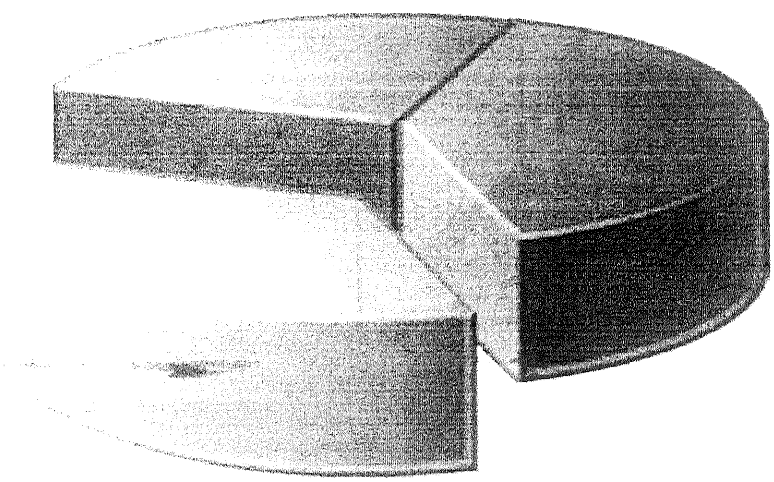
Colegio
Teresiano de la Vera-Cruz



GEOMETRÍA ANALÍTICA

Nombre: Carlos Ramírez Reinhold 4°A

Cd. Obregón, Sonora.

Semestre: enero- mayo 2018

Encuadre

Objetivo General y Específico:
El alumno recibirá la información práctica con relación a los fundamentos de la aplicación de la geometría analítica, con el propósito de establecer las bases para la comprensión del cálculo. El alumno podrá adquirir la habilidad para el manejo de procedimientos basados en los fundamentos de la geometría analítica y su aplicación en la solución de problemas prácticos.

Aplicación de la materia a la vida diaria:
El alumno desarrollará sus procesos aplicando los teoremas vistos en clase para facilitar el logro de sus objetivos, disminuyendo su tiempo de acción y respuesta ante los problemas, así mismo logrará capacitarse para la incursión a niveles matemáticos más elevados lo cual es requisito para su futuro desempeño.

Contenido Temático:
UNIDAD DE COMPETENCIA 1: Resolver geométrica y algebraicamente situaciones problemáticas que impliquen distancias entre puntos, razones en que diferentes puntos pueden dividir segmentos, áreas de polígonos representables en sistemas de coordenada, inclinaciones y pendientes de segmentos.

- 1.1 La identificación de posiciones.
- 1.2 Sistemas de coordenadas lineales.
- 1.3 Las coordenadas en el plano.
- 1.4 Área de un triángulo.
- 1.5 Punto que divide a un segmento en una razón dada.
- 1.6 Inclinación y pendiente de un segmento.

UNIDAD DE COMPETENCIA 2: Seleccionar y aplicar según convenga para la resolución de problemas, distintas formas de ecuaciones relacionadas con la recta.

- 2.1 Lugares geométricos, la recta.
- 2.2 La ecuación punto-pendiente.
- 2.3 Las intercepciones.
- 2.4 La ecuación general de la recta.
- 2.5 La ecuación normal de la recta.
- 2.6 Las distancias dirigidas.

UNIDAD DE COMPETENCIA 3: Graficar funciones analizando intercepciones de las gráficas con los ejes del sistema, coordenadas y posibles simetrías, extensión, asíntotas probables, puntos críticos, así como resolver problemas, gráfica y analíticamente, relacionados con esas figuras geométricas.

- 3.1 La simetría en las gráficas.
- 3.2 La extensión y las asíntotas.
- 3.3 La parábola.
  - 3.3.1 Ecuación con vértice en el origen.
  - 3.3.2 Ecuación con vértice fuera del origen.
  - 3.3.3 Forma general.
- 3.4 La circunferencia.

3.4.1 Ecuación del centro en el origen.
3.4.2 Ecuación con centro fuera del origen.
3.4.3 Forma general.
3.5 La elipse.
3.5.1 Ecuación con centro en el origen.
3.5.2 Ecuación con centro fuera del origen.
3.5.3 Forma general.
3.6 La hipérbola
3.6.1 Ecuación del centro del origen
3.6.2 Ecuación con centro fuera del origen
3.6.3 Forma general

REQUISITOS

Asistencia y Puntualidad

1. El alumno/a deberá conocer y cumplir con el Reglamento y el contrato social del Colegio.
2. Se tomará asistencia al inicio de la clase, el alumno/a deberá presentarse de manera puntual, solo tendrás 2 minutos de tolerancia, de 3 a 5 minutos será retardo y después de 5 minutos será falta sin excepción. Además por cada 2 retardos es una falta.
3. Por ser una materia de 5 horas a la semana, con más de 3 inasistencias por parcial el alumno quedará sin derecho a examen parcial.
4. En caso de faltar a una clase, el alumno deberá presentarse a la siguiente clase con su justificante otorgado por su titular. Pero no se suprime la responsabilidad de entregas de tareas y trabajos en clase. Estos deberán entregarse junto con el justificante para hacerlos válidos.
5. Presentarse limpio y correctamente vestido con el uniforme del Colegio.
6. El alumno deberá presentarse a clase con el material solicitado por el maestro (libros, cuaderno, juego geométrico, etc) a partir de la fecha que éste determine.

Respecto al espacio de trabajo

7. Mantener el salón libre de alimentos, bebidas, dulces, chicles, etc. Solo se permiten botellas con agua.
8. Pedir permiso para entrar y salir del salón de clases.
9. Mantener cualquier objeto ajeno a la clase (iPod, iPad, celular, reproductor de música, cámara, juguetes, etc.) apagado y guardado en la mochila. En caso de estar afuera, será retirado por el maestro y se entregará al titular.

Asignaciones

10. Las tareas (incluidas las del manual) y/o trabajos asignados, se entregarán en la fecha y hora señalada por el maestro, cumpliendo con los requerimientos generales y específicos.
11. Si la tarea no se encuentra especificada dentro del manual debe incluir:
    - Portada informal (Nombre de la escuela, nombre del alumno y maestro, número de tarea, título y fecha). Recuerda el formato de fecha: Mes/Día/Año
    - Letra Arial 10 o Times New Roman 12
    - Interlineado 1.5
    - Alineación: Justificado
    - Bibliografía, cita o referencia.
12. Si el trabajo presenta errores de ortografía, la calificación bajará 1 decima por cada error hasta llegar a las 5 décimas menos. Si el trabajo presenta más de 5 errores por cuartilla, se deberá corregir y se incluirán ambas tareas engrapadas en el portafolio.

Portafolio

13. El portafolio es el manual de ejercicios y asignaciones y es derecho a examen:
    - Presentarse completo (todos los ejercicios resueltos).
    - Contendrá las tareas calificadas, las corregidas y las que no se habían entregado en su momento.
    - Incluirá conclusión, comentario u opinión por parcial en la página asignada en su manual.
    - Las tareas y trabajos extras (no incluidos en el manual) se deberán entregar dentro de una hoja española y anexarlo al final del manual.

Sistema de Evaluación

14. Se requiere que el alumno obtenga un promedio igual o superior a 7 en sus 3 parciales para tener derecho a Examen/Proyecto Global.
15. En caso de perder 2 derechos a examen parcial, automáticamente se pierde el derecho a Examen/Proyecto Global.
16. El alumno que no presente global, se irá directamente a Extraordinario.
    Nota: Las situaciones no previstas en el reglamento y contrato social serán evaluadas por el maestro y/o titular.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Primer al Tercer Parcial	Conocimientos	40%
	Desempeños	20%
	Productos	20%
	Actitudes	10%
	Portafolio	10%
Final	Promedio de los tres parciales	75%
	Examen Global	25%

Bibliografía:

Ayres, F. JR., y MOYER R. (1986) *Trigonometría*, México: Mc Graw Hill.

Britton, J. R. (1982), *Matemáticas contemporánea*, México: Harla.

Gehrmann, J. y Lester T. (1986) *Trigonometría*, México: SITESA.

Rees, P. K., y Sparks F. W. (1986), *Trigonometría plana*, México: Reverte Mexicana S.A.

Spitzbart, A. y BARDELL R. H.,(1983), *Álgebra y trigonometría plana*, México: Continental.

Swokowski E. W.,(1981) *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*, México. Iberoamericana.

Zill, D. G., y DEWAR J. M. (1992), *Álgebra y trigonometría*, México: Mc Graw Hill.

PRIMER PARCIAL

UNIDAD I Identificación de Posiciones

Introducción a la Geometría Analítica

Definición.

La Geometría Analítica es el estudio de la geometría mediante un sistema de coordenadas que lleva asociada un álgebra.

Dos problemas fundamentales:

1. Dada una ecuación de variables x, y dibujar su gráfica, es decir, representarla geométricamente como un conjunto de puntos en el plano.
2. Dado un conjunto de puntos en el plano, relacionado por ciertas condiciones geométricas, determinar una ecuación cuya representación gráfica corresponda enteramente a aquellos puntos. Es te problema es conocido con el nombre de Lugar Geométrico.

Identificación de posiciones.

Para identificar algún punto en una recta se le agrega un valor real el cual nos pueda colocar en una posición de longitud ya sea positiva o negativa en referencia a un punto de origen.

Segmento: se constituye por la longitud señalada por dos puntos específicos. Los dos puntos se llaman extremos del segmento.

AB es un segmento cuyos extremos son A y B. La longitud del segmento AB se representa por $\overline{AB}$ (Esto significa, el segmento de "A" a "B").

El sentido de un segmento dirigido se indica siempre escribiendo primero el origen o punto inicial. De acuerdo con esto, si se especifica que el segmento $\overline{AB}$ tiene una longitud positiva, entonces el segmento $\overline{BA}$ tiene una longitud negativa:

$$\overline{AB} = \overline{BA}$$

Relación fundamental:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

EJERCICIO #1

Construir las relaciones de los siguientes segmentos por medio de la relación fundamental:

1.

$\overline{CA}+\overline{AB}=\overline{CB}$

2.

$\overline{BF}+\overline{FR}=\overline{BR}$

3.

$\overline{MN}+\overline{NP}=\overline{MP}$

4.

$\overline{QU}+\overline{UE}=\overline{QE}$

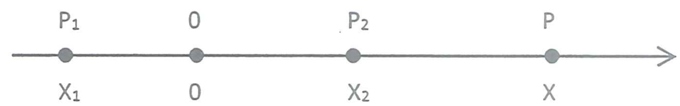
5.

$\overline{VW}+\overline{WZ}=\overline{VZ}$

Sistema de Coordenadas Lineales.

Geométrico

Analítico



TEOREMA 1: En un sistema coordenado lineal la longitud del segmento dirigido que une a dos puntos dados, se obtiene en magnitud y signo, restando la coordenada del origen de la coordenada del extremo.
El punto "P" en el sistema coordenado lineal es la representación geométrica del número real "x" y la coordenada "x': es la representación analítica del punto "P".

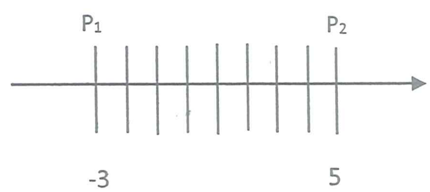
Distancia entre dos puntos (cuando la recta es horizontal o vertical).

La distancia entre dos puntos se define como el valor numérico o valor absoluto de la longitud del segmento rectilíneo que une esos dos puntos.

d= $|\overline{P_2P_1}| = |x_1 - x_2|$ ó d= $|\overline{P_1P_2}| = |x_2 - x_1|$

Ejemplo:

Hallar la distancia entre los puntos P_1 (5) y P_2 (- 3)

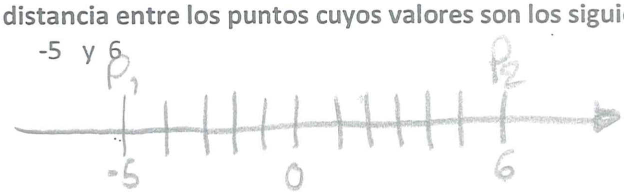


d = $|\overline{P_2P_1}| = |x_1 - x_2| = |5 - (-3)| = |8| = 8$

EJERCICIO #2

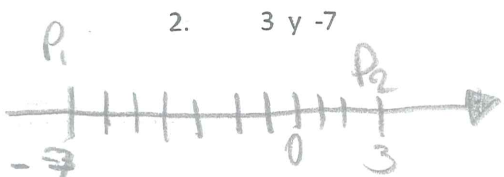
Hallar la distancia entre los puntos cuyos valores son los siguientes:

1. -5 y 6



$d = |-5-6| = |-11| = 11$

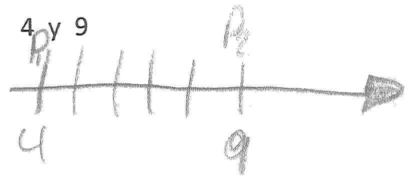
2. 3 y -7



$d = |-7-3| = |-10| = 10$

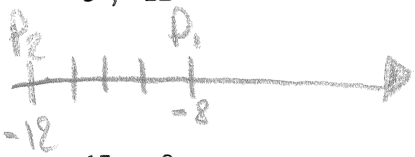
$d = |4-9| = |-5| = 5$

3. 4 y 9



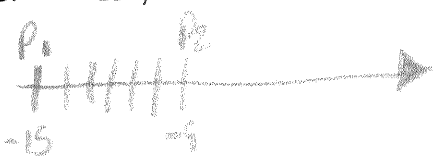
4. -8 y -12

$d = |-12-(-8)| = |-4| = 4$



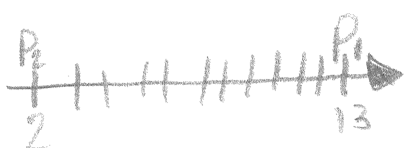
5. -15 y -9

$d = |-15-(-9)| = |-6| = 6$



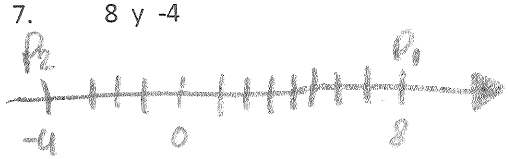
6. 13 y 2

$d = |2-13| = |-11| = 11$



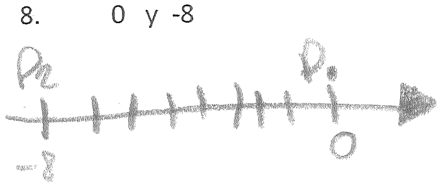
7. 8 y -4

$d = |-4-8| = |-12| = 12$

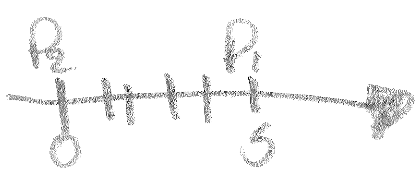


8. 0 y -8

$d = |0-8| = |-8| = 8$

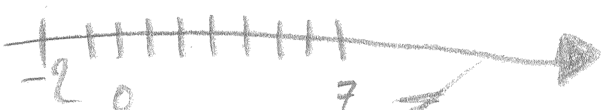


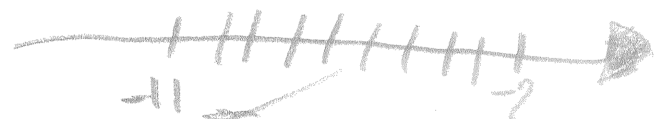
9. 5 y 0



$d = |0-5| = |-5| = 5$

10. La distancia entre dos puntos es 9. Si uno de los puntos es (- 2) , hallar el otro punto. (Dos casos.)

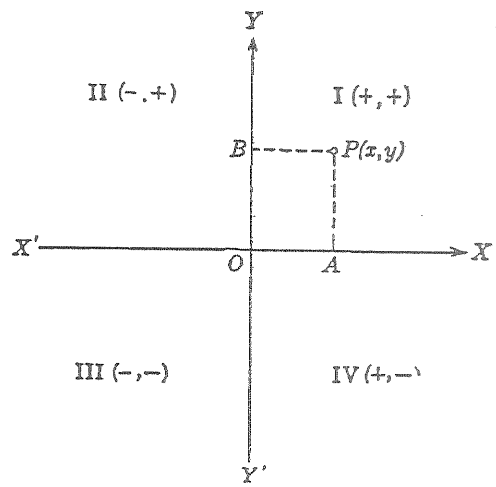




Sistema coordenado en el plano cartesiano.

Este sistema, indicado en la figura, consta de dos rectas, llamadas *ejes de coordenadas* (Eje X y Eje Y), perpendiculares entre sí, y su punto de intersección O, el origen.

Todo punto P del plano puede localizarse por medio del sistema coordenado. Se traza PA perpendicular al eje X y PB perpendicular al eje Y. La longitud del segmento OA se representa por x y se llama *abscisa* de P; la longitud del segmento dirigido OB se representa por y y se llama *ordenada* de P.

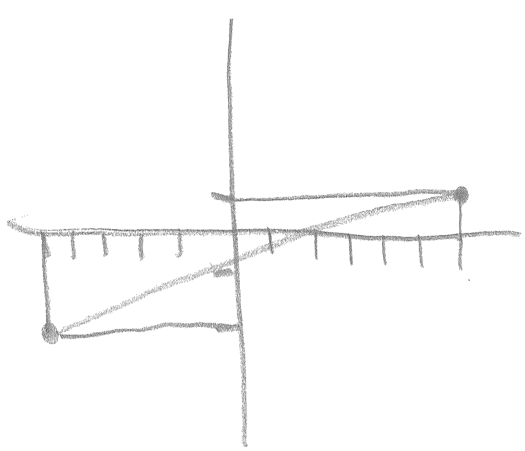


La localización de un punto por medio de sus coordenadas se llama *trazado* del punto.

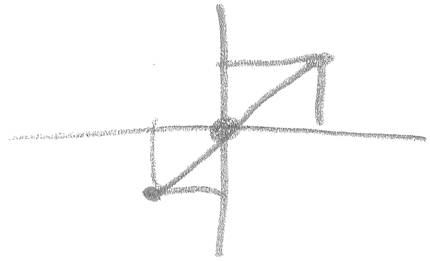
EJERCICIO #3

Graficar los puntos siguientes en el plano cartesiano y unirlos entre sí:

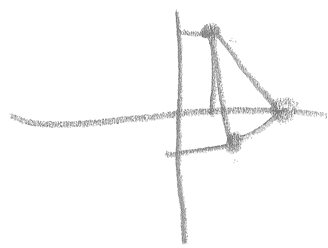
1. A(-5,-2); B(6,1)



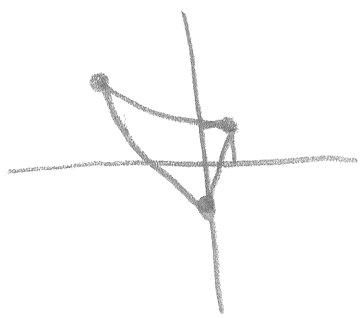
2. A(-3,-3); B(0,0); C(4,4)



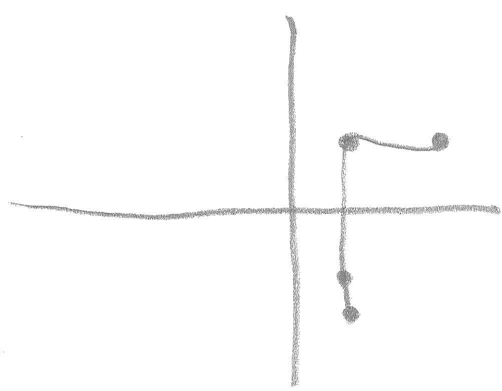
3. A(4,-1); B(2,6); C(7,0)

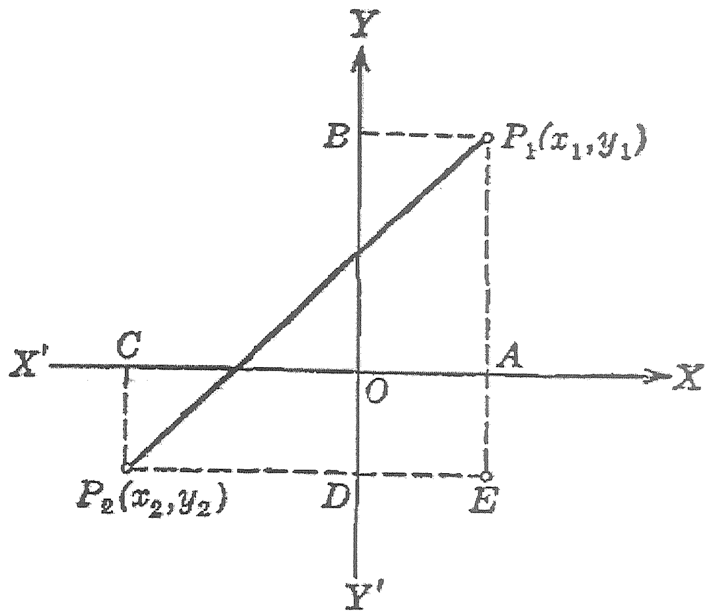


4. A(0,-2); B(1,1); C(-4,4)



5. A(4,2); B(2,2); C(4,-3); D(2,-3)



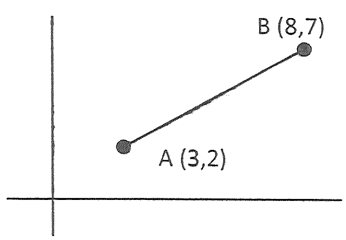


Distancia entre dos puntos (cuando la recta está inclinada).
TEOREMA 2: La distancia *d* entre dos puntos P_1 (X_1, Y_1) y P_2 (X_2, Y_2) está dada por la fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo:

Siendo dos puntos en el plano A (3, 2) y B (8, 7), graficar y encontrar la distancia entre esos dos puntos:



$$d = \sqrt{(7-2)^2 + (8-3)^2}$$

$$d = \sqrt{(5)^2 + (5)^2}$$

$$d = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}$$

$d = \sqrt{50}$

EJERCICIO #4

Graficar los puntos en el plano cartesiano y encontrar el área de la figura trazada.

1. A(-3,-2); B(6,-2); C(6,9)

2. A(-3,-3); B(3,3); C($-3\sqrt{3}, -3\sqrt{3}$)

3. A(2,-2); B(6,-2); C(6,5); D(2,5)

4. A(-2,-2); B(3,3); C(-1,6)

5. A(-3,-2); B(6,-2); C(6,9)

6. A(1,0); B(3,-2); C(0,4)

EJERCICIO #5

Graficar y resolver los siguientes problemas.

1. Demostrar que los puntos A (-4, 6) y B (-1, 4) y C (9, -3) están sobre una misma recta. (Son colineales).

2. Demostrar que los puntos A (8,-5), B (6,-2), C (4, 1) están sobre una misma recta. (Son colineales).

3. Hallar el perímetro del triángulo cuyos vértices son (7, 6), (-3, 9), (0, 4).

4. Hallar el perímetro del triángulo cuyos vértices son (-5, -5), (-8, 2), (-11,-5).

5. Hallar el perímetro del triángulo cuyos vértices son (4, -7), (10,-2), (-2,-1).

6. Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son (- 3, -1), (0, 3), (3, 4), (4, - 1).

7. Hallar la longitud de los lados de un triángulo según las coordenadas A (3,7), B (-5,-6) y C (-6,4).

8. Tres vértices de un rectángulo son los puntos (2, - 1), (7, - 1) y (7, 3). Hallar el cuarto vértice y el área del rectángulo.

9. Los vértices de un triángulo rectángulo son los puntos (1, -2), (4, -2), (4, 2). Determinar las longitudes de los catetos y después calcular el área del triángulo y la longitud de la hipotenusa.

10. Los vértices de un cuadrilátero son los puntos (1,3), (7,3), (9, 8) y (3,8). Demostrar que el cuadrilátero es un paralelogramo y calcular su área.

11. Demostrar que los puntos A (11,-3), B (8, 4), C (5,-3) son los vértices de un triángulo isósceles.

12. Demostrar que los puntos D (-3, 2), E (-3, 12), F (-9, 7) son los vértices de un triángulo isósceles.

13. Demostrar que los puntos (-5, 0), (0, 2) y (0, -2) son los vértices de un triángulo isósceles, y calcular su área.

14. Demostrar que los puntos A (12, 2), B (10, 10), C (7, 5) son los vértices de un triángulo rectángulo.

15. Demostrar que los puntos D (-3, 7), E (-3, 12), F (-9, 7) son los vértices de un triángulo rectángulo.

16. Demostrar que los puntos (0, 0), (3, 4), (8, 4) y (5, 0). son los vértices de un rombo.

17. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 8, es el punto (5,8). Si la abscisa del otro extremo es -4, hallar su ordenada. (Dos soluciones).

18. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5 es el punto (3, -2). Si la abscisa del otro extremo es 6 hallar su ordenada. (Dos soluciones).

19. Encontrar la abscisa del P_1 si P_2 (5,7) y la ordenada del P_1 es igual a 2, teniendo una distancia de $\sqrt{89}$ entre ellos.

20. Determinar un punto P que sea equidistante (se encuentre a la misma distancia) de los puntos A (-3, 4), B (3, -5) y C (-6, -6).

21. Determinar un punto P que sea equidistante (se encuentre a la misma distancia) de los puntos G (9,-4), H (-4,-2), I (3,-7).

22. Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos A (-4, -4) y B (-4, -6). Calcular las coordenadas del tercer vértice. (Dos soluciones).

23. Encontrar las coordenadas del centro de una circunferencia de radio 5 que pasa por (10,2) y (3,3).

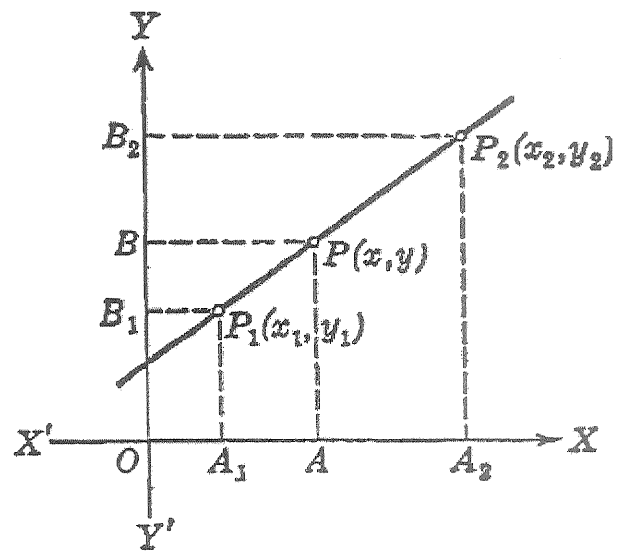
24. Encontrar el valor de Y_2 si entre los puntos P_1 (3, -2) y P_2 (6, Y_2) la distancia es 5.

25. En el triángulo de vértices A (7, 5), B (x, 3) y C (6, -7), se cumple que la distancia entre AB = $\sqrt{29}$ y la distancia entre BC = $2\sqrt{29}$, hallar el valor de x.

Punto que divide un segmento en una razón dada.

TEOREMA 3: Si P_1 (X_1, Y_1) y P_2 (X_2, Y_2) son los extremos de un segmento $\overline{P_1P_2}$, las coordenadas (x, y) de un punto P que divide a este segmento en la razón dada $r = \overline{P_1 P} / \overline{P P_2}$ son:

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1+r} \qquad y = \frac{y_1 + r y_2}{1+r} \qquad r \neq -1$$



$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \qquad r = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \qquad r \neq -1$$

TEOREMA 4: Las coordenadas del punto medio de un segmento tiene una razón $r = 1$ y cuyos puntos extremos son (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) son:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

TEOREMA 5: Cuando la razón "r" es negativa, el punto P es externo al segmento $\overline{P_1P}$.

EJERCICIO #6

Graficar y resolver los siguientes problemas.

1. Los extremos de un segmento son los puntos P_1 (7,4) y P_2 (-1,-4). Hallar la razón en que el punto P (1,-2) divide al segmento.

2. Hallar las coordenadas de un punto P(X, Y) que dividida al segmento de la recta determinado por los puntos A(2, 2) y B (-3, 4) en la relación $r = \frac{AP}{PB} = \frac{1}{3}$

3. Si P_1 (-4, 2) y P_2 (4, 6) son los puntos extremos del segmento $\overline{P_1P}$. Hallar las coordenadas del punto P(X, Y), que divide este segmento en la relación r = -3.

4. Hallar las coordenadas de un punto P (X, Y) que divida al segmento determinado por los puntos A (3, -7) y B (1, 4) en la relación $r = \frac{-5}{4}$

5. Los puntos extremos de un segmento son P_1 (2, 4) y P_2 (8, -4). Hallar el punto P (X, Y) que divide a este segmento en dos partes tales que r= -2.

6. Si se sabe que el punto A(7, -1) divide al segmento que determinan los puntos B(4, 9) y C(X_2, Y_2) en la razón $r = \frac{2}{5}$. Determina las coordenadas del punto C.

7. Uno de los puntos extremos de un segmento es el punto (7, 8), y su punto medio es (4,3). Hallar el otro extremo.

8. Los vértices de un triángulo son A (3, 8), B (2, -1) y C (6, -1). Si el punto D es el punto medio del lado BC, calcular la longitud de la mediana AD.

9. Determinar las coordenadas de los vértices de un triángulo cuyas coordenadas de los puntos medios de sus lados son: PM_1 (-5,4); PM_2 (2,2); PM_3 (3,3).

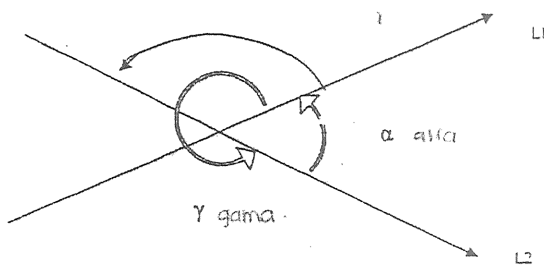
10. Los puntos medios de los lados de un triángulo son (2, 5), (4, 2) y (1, 1). Hallar las coordenadas de los tres vértices.

11. Del triángulo de vértices A $(4, 2)$, B $(0, 6)$ y C $(-2, -2)$; encontrar las 3 medianas y calcular sus longitudes.

12. Hallar las coordenadas de un punto M (X,Y) que divida al segmento AB en la razón $r = \frac{-8}{3}$, si A (-2, 1) y B (3, -4).

UNIDAD II — Pendiente de una Recta

Dos rectas al cortarse forman dos pares de ángulos opuestos por el vértice. Siempre que se hable de ángulos de dos rectas solo se considerarán ángulos < 180°.

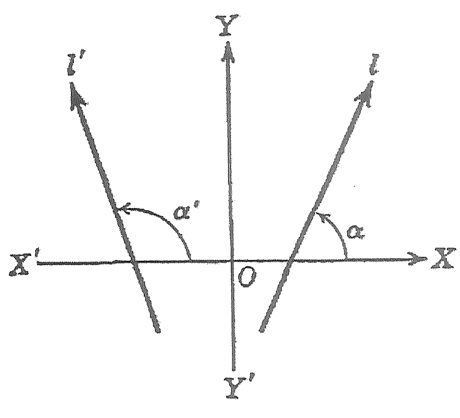


Ángulo de inclinación
$\underbrace{0° \le \alpha \le 180°}_{\text{Intervalo de variación}}$

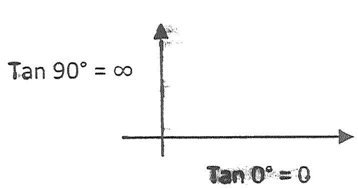
Ángulos Suplementarios: $\alpha+\beta = 180°$.
Ángulo Cóncavo: $\gamma = 360° - \alpha$

Pendiente de una Recta (Coeficiente Angular).

Es la tangente de su ángulo de inclinación y se denomina por la letra "m".
Por lo tanto $m = Tan\ \alpha$

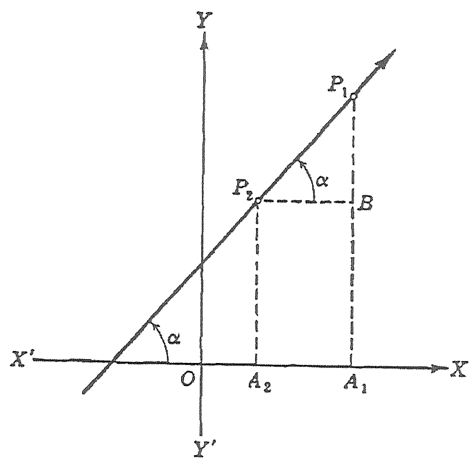


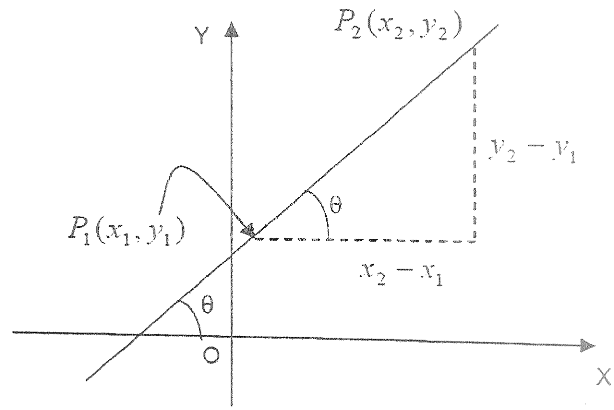
Si el ángulo α es agudo, entonces la pendiente es positiva; si α es obtuso, su pendiente es negativa. Además, toda recta perpendicular al eje de las "X" *no tiene pendiente*, es decir, no existe.



TEOREMA 6: Si P_1 (X_1, Y_1) y P_2 (X_2, Y_2) son dos puntos diferentes cualesquiera de una recta, la pendiente de la recta es:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \qquad x_1 \neq x_2$$





Considerando la recta en el plano cartesiano:

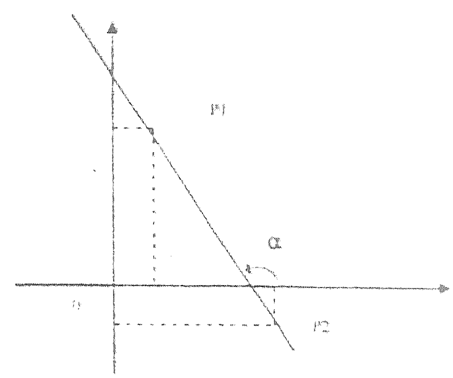
$$m = Tan\,\alpha = \frac{\overline{BP_1}}{\overline{P_2B}} \qquad \overline{BP_1} = y_2 - y_1 \qquad \overline{P_2B} = x_2 - x_1$$

Ejemplo: Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos (1,6) y (5,-2):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-6}{5-1}$$

$$m = \frac{-8}{4} = -2$$

$Tan\,\alpha = -2$
$\alpha = Tan^{-1}(-2)$
$\alpha = 116.56°$



EJERCICIO #7

Graficar y resolver los siguientes problemas.

1. Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos (3,-2) y (7,-3).

2. Los vértices de un triángulo son los puntos (2, -2); (-1, 4) y (4, 5). Calcular la pendiente de cada uno de sus lados.

3. Una recta de pendiente 3 pasa por el punto (3, 2). La abscisa de otro punto de la recta es 4. Hallar su ordenada.

4. Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos (2, 7) y (6,-1).

5. Un cuadrado de lado igual a $2a$, tiene su centro en el origen y sus lados son paralelos a los ejes coordenados. Hallar las coordenadas de sus cuatro vértices.

6. Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $(5,4)$ y $(10,8)$.

7. Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos (5,-7) y (12,-7).

8. Demostrar que los siguientes puntos son colineales (tienen la misma pendiente): A (-1,-1), B (4, 4), C (7, 7).

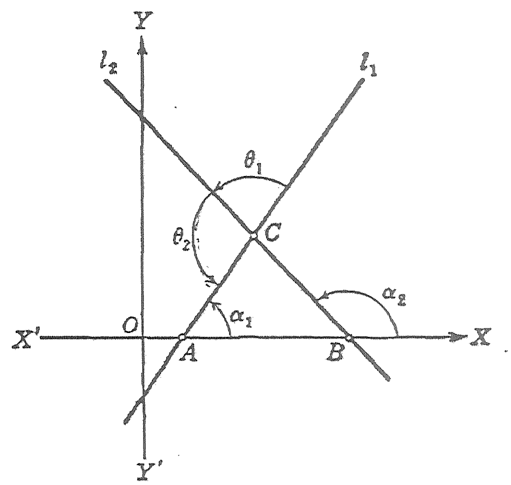
9. Demostrar que los siguientes puntos son colineales (tienen la misma pendiente): D (4,-4), E (10,-8), F (13,-10).

10. Demostrar que los siguientes puntos son colineales (tienen la misma pendiente): G (-10,-8), H (-8,-8), I (-4,-8).

11. Demostrar que la recta que pasa por los puntos $(-1, -5)$ y $(6, -2)$ es paralela a la recta que pasa por $(-2, -4)$ y $(5, -1)$.

12. Una recta de pendiente -2 pasa por el punto (6,-3). La abscisa de otro punto de la recta es -3. Hallar su correspondiente ordenada.

Ángulo de dos rectas.



Si se consideran las dos rectas ℓ_1 y ℓ_2. Sea C su punto de intersección y A y B los puntos en que cortan al eje X. Sean θ_1 y θ_2 los dos ángulos suplementarios que forman. Cada uno de estos ángulos, θ_1 y θ_2, se miden, tal como indican las flechas curvadas, en sentido contrario al de las manecillas de un reloj, o sea, en sentido positivo. La recta a partir de la cual se mide el ángulo se llama recta inicial; la recta hacia la cual se dirige el ángulo se llama recta final. Las pendientes de las rectas inicial y final se llaman pendiente inicial m1 y pendiente final m2, respectivamente.

Por Geometría, un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos. Por tanto en el triángulo ABC de la figura, el ángulo ACB es igual a θ_1 por ser ángulos opuestos por el vértice. Así que se llega a las siguientes conclusiones:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \theta_1 \qquad \theta_1 = \alpha_1 - \alpha_2$$

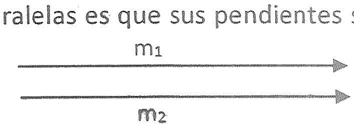
TEOREMA 7: Un ángulo especificado θ formado por dos rectas donde m_1 es la pendiente inicial y m_2 es la pendiente final está dado por la fórmula:

$$Tan\,\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \qquad m_1 m_2 \neq -1$$

Rectas Paralelas.

La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas es que sus pendientes sean iguales.

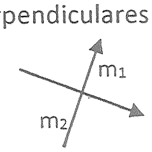
$$m_1 = m_2$$



Rectas Perpendiculares.

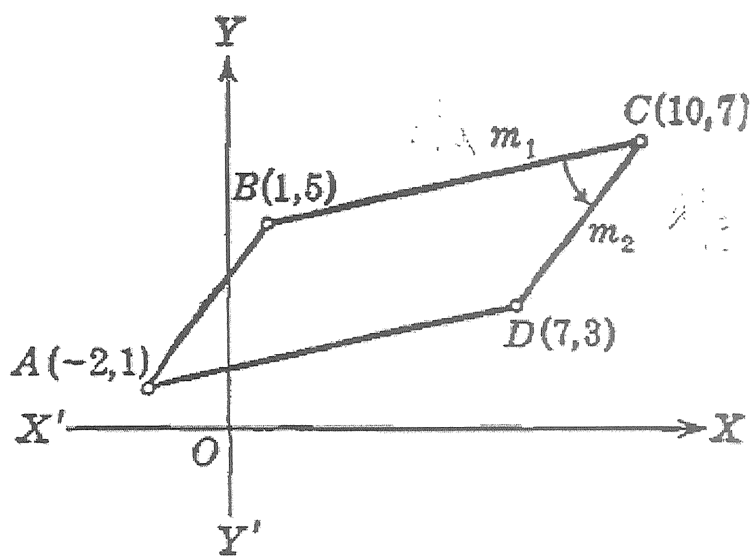
La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares entre sí es que el producto de sus pendientes sea igual a -1.

$$m_1 m_2 = -1 \qquad ó \qquad m_1 = -\frac{1}{m_2}$$



Ejemplo: Hallar el ángulo agudo "c" del paralelogramo cuyos vértices son A (-2, 1), B (1,5), C (10,7) y D (7, 3).

a) Graficar las coordenadas de los puntos A, B, C, D.
b) Indicar la dirección del ángulo buscado, "c".
c) Obtener las pendientes de las rectas que afectan al ángulo.
d) Aplicar la fórmula para obtener el ángulo entre dos rectas.



$$m_1 = \frac{7-5}{10-1} = \frac{2}{9} \qquad m_2 = \frac{7-3}{10-7} = \frac{4}{3}$$

$$Tan\ c = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{{}^4/_3 - {}^2/_9}{1 + {}^4/_3({}^2/_9)} = \frac{6}{7} = 0.857$$

$$c = Tan^{-1}(0.857) = 40.59°$$

EJERCICIO #8

Graficar y resolver los siguientes problemas.

1. Dos rectas se cortan formando un ángulo de 135°. Sabiendo que la recta final tiene una pendiente de - 3, calcular la pendiente de la recta inicial.

2. Dos rectas se cortan formando un ángulo de 45°. La recta inicial pasa por los puntos (-2,1) y (9,7) y la recta final pasa por el punto (3,9) y por el punto A cuya abscisa es -2. Hallar la ordenada de A.

3. Hallar los ángulos interiores de los siguientes triángulos dadas las coordenadas de sus vértices: A (6,-6), B (-4, 4), C (-2,-3).

4. Hallar los ángulos interiores de los siguientes triángulos dadas las coordenadas de sus vértices: D (4, 5), E (-4, 8), F (-5, -1).

5. Hallar los ángulos interiores de los siguientes triángulos dadas las coordenadas de sus vértices: G (4, 5), H (-4, 2), I (-3, -7).

6. El ángulo formado por la recta que pasa por los puntos A (4, 3) y B (-3,-3) con la que pasa por D (4, Y) es de 135°, calcular el valor de Y.

7. Demostrar que los puntos A (5,-4), B (3,-6) y C (7,-10) son los vértices de un triángulo rectángulo.

8. Demostrar que los tres puntos (2, 5), (8, -1) y (-2, 1) son los vértices de un triángulo rectángulo, y hallar sus 2 ángulos agudos.

13. L1 pasa por (-3, -2) y (4, 1); L2 pasa por (2, -9) y (x, 8); hallar el valor de x si las rectas se cortan en un ángulo β donde Tan β = 2; se considera que L2 es recta final.

14. Calcular el ángulo formado por las rectas cuyas pendientes son $m_1 = \frac{2}{3}$ y $m_2 = -\frac{3}{2}$.

REPASO PRIMER PARCIAL

I. Encontrar la distancia entre los puntos cuyos valores son los siguientes:

(1)	$-6\ y\ 2$	**(2)**	$2\ y\ 6$	**(3)**	$-1\ y\ -5$	**(4)**	$-7\ y\ 0$	**(5)**	$0\ y\ 4$
(6)	$-24\ y\ -8$	**(7)**	$-16\ y\ -1$	**(8)**	$-9\ y\ -12$	**(9)**	$-1\ y\ 2$	**(10)**	$-2\ y\ 2$

II. Graficar los siguientes puntos en el plano cartesiano y encontrar el área de la figura trazada en caso de aplicar:

(11) $A(-4,-1);\ B(-4,4);\ C(3,-1)$ **(12)** $A(0,1);\ B(3,1);\ C(3,6);\ D(0,6)$

(13) $B(0,2);\ B(2,0);\ C(-2,-4)$

III. Graficar y resolver los siguientes problemas:

(14) Demostrar que los puntos $A(-6,4), B(-3,2)\ y\ C(7,-5)$ están sobre una misma recta, es decir, son colineales.

(15) Hallar el perímetro del triángulo cuyos vértices son: $(-1,-2), (-5,-4), (-3,-3)$

(16) Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son: $(-2,0), (1,4), (4,5), (5,0)$

(17) Hallas la longitud de los lados de un triángulo según las coordenadas $A(-1,3), B(-9,-10)\ y\ C(-10,0)$

(18) Tres vértices de un rectángulo son los puntos $A(-3,1);\ B(0,1);\ C(0,6);\ D(-3,6)$. Hallar el cuarto vértice y el área del rectángulo.

(19) Los vértices de un triángulo rectángulo son los puntos $(2,-4), (8,-4)\ y\ (8,4)$. Determinar las longitudes de los catetos y después calcular el área del triángulo y la longitud de la hipotenusa.

(20) Demostrar que los puntos $D(-4,6), E(-4,11), F(-10,6)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

(21) Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 7 es el punto $(4,-1)$. Si la abscisa del otro extremo es 8 hallar su ordenada. (Dos soluciones).

(22) Determinar un punto P que sea equidistante (se encuentra a la misma distancia) de los puntos $A(0,7), B(6,-2)\ y\ C(-3,-3)$.

(23) Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos $A(0,0)\ y\ B(0,-2)$. Calcular las coordenadas del tercer vértice.

(24) Encontrar las coordenadas del centro de una circunferencia de radio 5 que pasa por $(8,2)\ y\ (1,3)$.

IV. Graficar y resolver los siguientes problemas referentes a una razón en un segmento:

(25) Los extremos de un segmento son los puntos $P_1(5,5)$ y $P_2(-3,-3)$. Hallar la razón en que el punto $P(1,1)$.

(26) Hallar las coordenadas de un punto $P(x,y)$ que divida al segmento de la recta determinado por los puntos $A(0,0)$ y $B(-2,-5)$ en la relación $r = \frac{AP}{PB} = \frac{1}{4}$.

(27) Si se sabe que el punto $A(5,-3)$ divide al segmento que determinan los puntos $B(2,7)$ y $C(x_2, y_2)$ en la razón $r = \frac{3}{5}$. Determinar las coordenadas del punto C.

(28) Determinar las coordenadas de los vértices de un triángulo cuyas coordenadas de los puntos medios de sus lados son: $PM_1(5,-4); PM_2(2,2); PM_3(-3,3)$.

V. Graficar y resolver los siguientes problemas relacionados a la recta y la pendiente.

(29) Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $(-4,-9)$ y $(3,-7)$.

(30) Los vértices de un triángulo son los puntos $(-1,-5); (-4,1)\ y\ (1,2)$. Calcular la pendiente de cada uno de sus lados.

(31) Una recta de pendiente 4 pasa por el punto $(2,1)$. La abscisa de otro punto de la recta es 3. Encuentre su ordenada.

(32) Demostrar que los siguientes puntos son colineales (tienen la misma pendiente): $A(-1,-3), B(2,3)\ y\ C(6,11)$.

(33) Demostrar que la recta que pasa por los puntos $(-2,-6)$ y $(5,-3)$ es paralela a la recta que pasa por $(-3,-5)$ y $(4,-2)$.

VI. Grafique y resuelva los siguientes problemas en relación a dos rectas en el plano.

(34) Dos rectas se cortan formando un ángulo de 225°. Sabiendo que la recta final tiene una pendiente de -2, calcular la pendiente de la recta inicial.

(35) Dos rectas se cortan formando un ángulo de 135°. La recta inicial pasa por los puntos (-5,-2) y (6,4) y la recta final pasa por el punto (0,6) y por el punto A cuya abscisa es -5. Hallar la ordenada de A.

(36) Encontrar los ángulos interiores de los siguientes triángulos dadas las coordenadas de sus vértices: A(8,-4), B(-2,6) y C(0,-1).

(37) Demostrar que los tres puntos (-1,2), (5,-4) y (-5,-2) son los vértices de un triángulo rectángulo, y hallar sus ángulos agudos.

(38) L_1 para por (-1,0) y (6,7);L_2 pasa por (4,-5) y (x,10); hallar el valor de x si las rectas se cortan en un ángulo β donde $\tan\beta = 1.5$; se considera que L_2 es recta final.

(39) Calcular el ángulo formado por las rectas cuyas pendientes son $m_1 = \frac{2}{5}$ y $m_2 = -\frac{5}{2}$

CONCLUSIÓN PRIMER PACIAL

Limpieza		
Tinta		
Orden		
Puntualidad		
Ejercicios y Asig.		
Conclusión		

SEGUNDO PARCIAL

UNIDAD III La Recta

Lugares Geométricos

Línea Recta

Se le llama línea recta al lugar geométrico de los puntos tales que si se toman dos puntos diferentes cualesquiera P_1 (X_1, Y_1) y P_2 (X_2, Y_2), el valor de la pendiente m resulta siempre constante.

Forma General de la Ecuación de la Recta

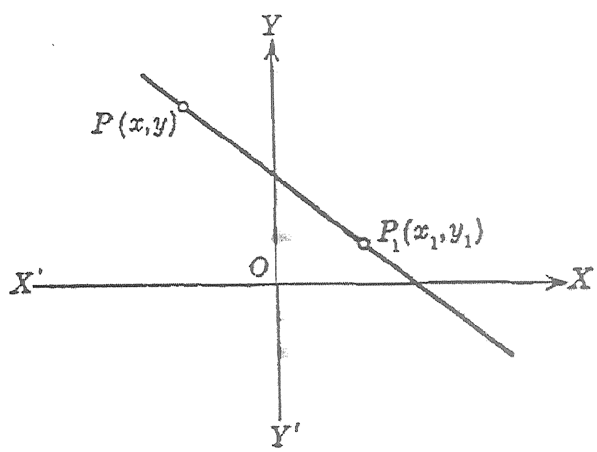
$$Ax + By + C = 0$$

Donde A, B y C son constantes.

Ejemplos: $3x - 2y + 8 = 0$; $x + 2y - 5 = 0$; $2x - 3y = 0$; $9y + 7 = 0$

Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada.

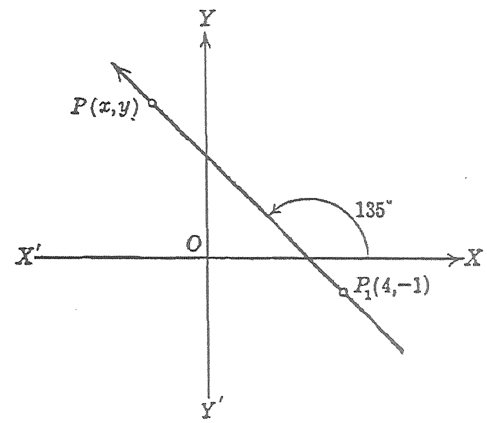
(Ecuación Punto-Pendiente)



Teorema 8: La recta que pasa por el punto P_1 (X_1, Y_1) y tiene la pendiente m , tiene por ecuación:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que pasa por el P1 (4, -1) y tiene un ángulo de inclinación 135°.



La pendiente m de la recta es:

$m = Tan\ (135°) = -1$

Por lo tanto, la ecuación de la recta punto-pendiente es:

$y - (-1) = -1\ (x - 4)$

$y + 1 = -x + 4$

Despejando e igualando a cero:

$x + y + 1 - 4 = 0$

La ecuación de la recta es:

$x + y - 3 = 0$

EJERCICIO #9

Graficar y resolver los siguientes problemas.

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (1,5) y tiene pendiente 2.

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto B (-6,-3) y tiene un ángulo de inclinación de 45°.

3. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -3 y su intercepción con el eje "y" es -2.

4. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto D (4,-3) y tiene un ángulo de inclinación de 63°.

5. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -5 y su intercepción con el eje "x" es 4.

6. Hallar la ecuación de la recta que pasa por A (4,1) y tenga de pendiente $m = {}^{1}/_{3}$.

7. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (7, 6) y B (4, -6).

8. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (6, -2) y tenga una inclinación de 60°.

9. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos M (3,5) y N (9,7).

10. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos R (2,-2) y S (-4,2).

11. Los vértices de un cuadrilátero son A (0, 0), B (2, 4), C (6, 7), D (8, 0). Hallar las ecuaciones de las rectas que forman sus lados.